I Encuentro Matemático del Caribe
Noviembre 18 - 19, 2019

Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena de Indias - Colombia

Uso de la variable compleja orientada a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de la integral de Bromwich

Joanmartin Suarez Loaiza.*

Resumen

Se es bien conocido que en la aplicación de las ecuaciones diferenciales, ya sean estas ordinarias o parciales, se es constante encontrarse con ecuaciones de complejos pasos para hallarse una solución, para lo cual se han diseñado Software, mas sin embargo la manera manual de hacerlo se ejecuta más comúnmente llevando a cabo la aplicación de las transformadas integrales, en este caso tratándose de la transformada de Laplace, sin embargo en el cálculo de la inversa de esta se restringe a tener en cuenta formas determinadas. En esta ponencia se busca presentar el concepto general de la transformada inversa de Laplace, brindar una introducción a conceptos de análisis complejo, el cual es la base de la integral de Bromwich, y exponer la forma de aplicación, los conceptos en los que se basa para su funcionamiento.

Palabras & frases claves: Transformada inversa de Laplace, Análisis Complejo, Integral de Bromwich.

1. Introducción

En la teoría de Variable compleja se encuentran generalizaciones a conceptos de la variable real entre los cuales cabe resaltar las raíces de los polinomios,

*Universidad Tecnólogica de Bolivar, e-mail: joanmartinsuarezloaiza@gmail.com

el comportamiento de las funciones en sus singularidades, la generalización de funciones trascendentes, los teoremas que se utilizan muy a menudo para demostrar conjeturas en la variable real, entre otros. Los teoremas principales son el Teorema de Moivre, el Teorema de Cauchy y Teorema de los residuos, los cuales son la base para el cálculo de integral de Bromwich.

La integral de Bromwich es la definición formal de la transformada inversa de Laplace, en la cual se tienen en cuenta principalmente conceptos de Variable compleja para llevarse a cabo su cálculo.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\hat{f}(s)ds \tag{1}$$

Dicha fórmula (1) consiste en una integral de variable compleja, que tiene definido un contorno, contorno de Bromwich, que puede modificarse dependiendo de las singularidades que presente la función. La integración se realiza a lo largo de un segmento $s = \gamma$ del plano complejo donde $s = x+iy$. El número real γ se escoge en tal forma que $s = \gamma$ quede al lado derecho de todas las singularidades (polos, puntos de ramificación o singularidades esenciales); aparte de esta condición γ es arbitraria. Seguido a esto se tienen en cuenta los conceptos dados por los teoremas para encontrar, a través de una análisis riguroso, la respectiva inversa de la transformada. Estos consisten en el cálculo de los residuos de la función en sus respectivas singularidades, debe tenerse en cuenta el hecho de que al expandirse las funciones en sus series de Taylor se evidencia con mayor claridad que tipo de singularidad se presenta. Para el cálculo se divide por secciones el contorno establecido, estudiando cada partición individualmente, estableciendo, por lo tanto, un intervalo de evaluación distinto para cada tramo. Concluidos dichos procesos se procede a concretar con la suma de los residuos hallados y así encontrar la transformada inversa de la función. Para el caso donde sólo tiene singularidades aisladas en puntos s_k, se tiene entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(e^{st}\hat{f}(s), s_k) \tag{2}$$

Referencias

[1] Acevedo, B., Variable compleja. Universidad Nacional, 2006.

[2] Ivorra, C., Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números. Universidad de Valencia, 2008.

[3] Salcedo, L., Variable compleja. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Granada, 2016.

[4] Spiegel, M. & Arias., Transformadas de Laplace. McGraw Hill, 1991.