# I Encuentro Matemático del Caribe

Noviembre 18 - 19, 2019

Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena de Indias - Colombia


# Genericidad de Métricas Bumpy para Hipersuperficies con CMC y Frontera Libre


Autor: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas.*



**Resumen**

Sea $(M, g)$ una variedad Riemanniana de dimensión $n+1$, con frontera suave $\partial M$ y $\Sigma^n$ una hipersuperficie de $M$ con CMC (Curvatura Media Constante) y frontera libre. Mostraremos que casi todas las metricas en $M$ hacen que $\Sigma$ sea no-degenerada. Dicho de otra forma, el conjunto de todas las métricas $g$ en $M$ para las cuales $\Sigma$ es no-degenerada es genérico en el espacio de las métricas Riemannianas.



**Palabras & frases claves:** Hipersuperficies con CMC, frontera libre, métricas Bumpy, genericidad, campos de Jacobi, condición de frontera libre linearizada.


## 1. Introducción

Sea $(M, g)$ una variedad Riemanniana de dimensión $n+1$ con frontera suave $\partial M$ y sea $\Sigma^n$ una hipersuperficie de $M$ compacta y con frontera suave $\partial\Sigma$. Asumimos que $\partial M \cap \Sigma = \partial\Sigma$ y que $M \setminus \Sigma = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, con $\overline{\Omega}_1$ compacto y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Decimos que $\Sigma$ es una *hipersuperficie con CMC (curvatura media constante) y frontera libre* si para todo $p \in \partial\Sigma$, $\vec{n}_{\partial M}(p) \in T_p\Sigma$, donde $\vec{n}_{\partial M}(p)$ es el campo vectorial normal exterior a lo largo de la fronter de $M$ en $p$.

Sabemos que si $\Sigma$ es una hipersuperficie con CMC y frontera libre entonces el mapeo inclusión $\mathtt{i} : \Sigma \to M$ es un punto crítico para el *$g$-funcional de área* $\mathcal{A}_g$


*Universidad Industrial de Santander (UIS), Escuela de Matemáticas, e-mail: `cwrodrig@uis.edu.co`

definido en el conjunto $\mathrm{Emb}_\partial(\Sigma, M)$ de todos los encajamientos (embebimientos) $x : \Sigma \to M$ que satisfacen $x(\partial\Sigma) \subset \partial M$.

Decimos que $\Sigma$ es *no-degenerada* si $\mathfrak{i}$ es un punto crítico no degenerado de $\mathcal{A}_g$ en $\mathrm{Emb}_\partial(\Sigma, M)$. Equivalentemente, $\Sigma$ is no-degenerada si no existe un campo de Jacobi no trivial $f$ a lo largo de $\Sigma$ que satisfaga la condición de frontera libre linerizada:

$$g\big(\nabla f, \vec{n}_{\partial M}\big) + \mathrm{II}^{\partial M}\big(\vec{n}_\Sigma, \vec{n}_\Sigma\big)\, f = 0,$$

donde $\nabla f$ es el $g$-gradiente de $f$, $\vec{n}_\Sigma$ es el vector unitario normal a lo largo de $\Sigma$ y $\mathrm{II}^{\partial M}$ es la segunda forma fundamental de $\partial M$ en la dirección del vector normal $\vec{n}_{\partial M}$.

Una métrica $g$ en $M$ se dice *Bumpy* si todo encajamiento con CMC y frontera libre de $\Sigma$ en $M$ es no-degenerado. Lo que probamos es que el conjunto de las métricas Bumpy en $M$ es un conjunto genérico, es decir, es un subconjunto del espacio de las métricas en $M$ que es la intersección contable de subconjuntos abiertos densos. Aplicamos el Teorema de Sard-Smale en dimensión infinita.

# Referencias


[1] R. ABRAHAM , *Bumpy metrics*, in Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif.,(1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 1-3

[2] D. V. ANOVSON, *Generic properties of closed geodesics* , Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 4, 675-709, 896

[3] R.G. BETTIOL, P. PICCIONE AND B. SANTORO,*Deformations of free boundary CMC hypersurfaces and applications.* arXiv: 1411.0354v1 [math.DG], Noviembre de 2014.

[4] L. BILIOTTI, M.A. JAVALOYES AND P. PICCIONE,*Genericity of nondegenerate critical points and Morse geodesic functional.*Indiana University Mathematics Journal, 58 (2009), n°4, 1797-1830.

[5] C. W. RODRÍGUEZ, *Genericity of Bumpy Metrics, Bifurcation and Stability in Free Boundary CMC Hypersurfaces.* (Tesis doctoral), Sao Paulo - Brasil, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de Sao Paulo, 2018.

[6] A. ROS AND E. VERGASTA , *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary* , Geometriae Dedicata, Kluwer Academic Publishers. June 1995, Volume 56, Issue 1, pp 19-33

[7] S. SMALE,*An infinite dimensional version of Sard's theorem.*Amer. J. Math. 87 (1965), 861-866.

[8] B. WHITE,*The space of minimal submanifolsd for varying Riemannian metrics.*Indiana Univ. Math. J.40 (1991), 161-200.