I Encuentro Matemático del Caribe

Noviembre 18 - 19, 2019

Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena de Indias - Colombia

Diferenciabilidad de Multifunciones

Mario Ordóñez; John B. Moreno*

Resumen

En el presente proyecto se usará una reciente propuesta de generalización de la diferencia de Hukuhara para conjuntos convexos y compactos.

$$A \ominus_g B = C \Leftrightarrow \begin{cases} A = B + C \\ \text{ó} \\ B = A + (-1)C \end{cases}$$

Demostrando inicialmente que es una operación binaria en el conjunto de bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$, para luego introducir y estudiar la diferenciación generalizada de Hukuhara en funciones con dominio un intervalo real y rango el conjunto de bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$, también se considerará otras posibles definiciones para la derivada de este tipo de funciones y su conección con la derivada generalizada de Hukuhara y por último se propondrá la integración definida de estas multifunciones enmarcadas en la diferenciaión generalizada de Hukuhara.

Palabras & frases claves: Multifunciones, Diferencia de Hukuhara, Derivada de Hukuhara

1. Introducción

Las multifunciones en la actualidad tienen variadas e interesantes aplicaciones en distintas áreas del conocimiento, como por ejemplo, en los problemas

*Universidad Tecnológica de Bolivar,Universidad del Atlántico e-mail: jbmorenobarrios@gamil.com

de control y teoría de ecuaciones contingentes, en ramas del anÃ¡lisis relacionadas con el estudio de subdiferencias de funciones convexas, en la economía matemática y como un intento de manejar la incertidumbre (no estadÃstica, ni probabilística) de los intervalos que aparecen en muchos modelos matemáticos o informáticos de algunos fenómenos deterministas del mundo real. Es por esto, que el desarrollo del análisis de multifunciones ha tomado relevancia a nivel global.

En el análisis real clásico, tal vez uno de los conceptos más importantes es el de la derivada de una función de valor real, dado que tiene aplicaciones concretas, entre las que se encuentra la descripción de cambios de magnitudes y propiedades físicas relacionadas con el movimiento, es interesante notar que el anÃ¡lisis de multifunciones se empieza a tener en cuenta al intentar describir mediante una función el movimiento de los electrones dentro de los átomos para el cual el análisis real clásico no ha sido suficiente. La primera monografía que trata el análisis de multifunciones de intervalos es el célebre libro de Moore [2], desde entonces se discuten en varias monografías y trabajos de investigación [3, 9]. La derivada de Hukuhara de una multifución fue introducida por primera vez por Hukuhara en [16] y fue el punto de partida para el tema de Ecuaciones Diferenciales de Conjuntos y más tarde también para Ecuaciones Diferenciales Difusas. Recientemente, varias obras como, por ejemplo, [17, 20], han vuelto la atención del anÃ¡lisis no lineal mediante ecuaciones diferenciales de conjuntos. Además, una generalización y desarrollo muy importante relacionado con el tema del presente trabajo se encuentra en el campo de los conjuntos difusos, es decir, cálculo difuso y ecuaciones diferenciales difusas [24, 31], como también en el desarrollo de sistemas dinámicos métricos.

El concepto de diferenciabilidad de Hukuhara tiene un importante inconveniente, que es el comportamiento paradójico de las soluciones de una ecuación diferencial difusa, es decir, ïrreversibilidad bajo incertidumbre". Esto viene del hecho que en una ecuación diferencial puede tener sólo soluciones con longitud creciente de su soporte, y por esta razón la incertidumbre va aumentando con el tiempo. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales de multifunciones son una forma natural de modelar la incertidumbre epistémica de un sistema dinámico, todavía esto no está bien desarrollado debido al inconveniente mencionado anteriormente del concepto de Hukuhara.

En el presente trabajo se usará una reciente propuesta de generalización de la diferencia de Hukuhara para conjuntos convexos y compactos. Demostrando inicialmente que es una operación binaria en el conjunto de bolas cerradas con radio finito en $\mathbb{R}^n$, para luego introducir y estudiar la diferenciación generalizada de Hukuhara en funciones con dominio en los reales y rango el conjunto de las bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$ con radio finito, también se considerará otras posibles definiciones para la derivada de este tipo de funciones y su conexión con la derivada generalizada de Hukuhara.

Referencias

[1] Luciano Stefanini-Barnabás Bede: *"Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations"*, University of Texas-Pan American, 2008.

[2] R.E. Moore.: *"Análisis Interval "*, In Abstract and Applied Analysis, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[1] A. Neumaier.: *"MÃ©todos Intervales para Sistemas de Equations "*, Cambridge University Press, 1990.

[3] N.S. Nedialkov, K.R. Jackson, J.D. Pryce: *"An effective high order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE "*, Reliab. Comput. 7 (6) (2001) 449-465.

[4] K. Makino, M. Berz: *"Efficient control of the dependency problem based on Taylor model methods "*, Reliab. Comput. 5 (1) (1999) 3-12. D.

[4] A. Neumaier: *"Rigorous sensitivity analysis for parameter dependent systems of equations "*, J. Math. Anal. Appl. 114 (1989) 16-25.

[5] G. Alefeld, G. Mayer: *"Interval analysis: Theory and applications "*, J. Comput. Appl. Math. 121 (2000) 421-464.

[6] D. Moens, D. Vandepitte: *"A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis "*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194.(14-16) (2005) 1527-1555.

[7] I. Skalna, M.V. Rama Rao, A. Pownuk: *"Systems of fuzzy equations in structural mechanics "*, J. Comput. Appl. Math. 218 (2008) 149-156.

[8] J.P. Aubin, A. Cellina: *"Differential Inclusions "*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[9] K. Deimling: *"Multivalued Differential Equations "*, W. De Gruyter, Berlin, 1992.

[10] M. Feckan: *"Chaos in ordinary differential equations with perturbations: Applications to dry friction problems "*, Nonlinear Anal. TMA 30 (1997) 1355-1364.

[11] M. Kunze: *"Non-Smooth Dynamical Systems "*, Springer, 2000.

[12] W. Sextro: *"Dynamical contact problems with friction, in: Models, Methods, Experiments and Applications "*, Springer, 2002.

[13] S. Abbasbandy, J.J. Nieto, M. Alavi: *"Tuning of reachable set in one-dimensional fuzzy differential inclusions "*, Chaos Solitons Fractals 26 (2005),1337-1341.

[14] M. Hukuhara: *"IntÃ©gration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex "*, Funkcial. Ekvac. 10 (1967) 205-229.

[15] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham: *"Set differential equations and flow invariance "*, J. Appl. Anal. 82 (2) (2003) 357-368.

[16] V. Lakshmikantham, A.A. Tolstonogov: *"Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations "*, Nonlinear Anal. 55 (3) (2003) 255-268.

[17] F.S. De Blasi, V. Lakshmikantham, T.G. Bhaskar: *"An existence theorem for set differential inclusions in a semilinear metric space "*, Control Cybernet. 36(3) (2007) 571-582.

[18] V. Lakshmikantham, R. Mohapatra: *"Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions "*, Taylor y Francis, London, 2003.

[19] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *"Existence for Set Differential Equations via Multivalued Operator Equations, in: Differential Equations and Applications "*, Vol.5, Nova Sci. Publ, New York, 2007, pp. 1-5.

[20] F.S. De Blasi: *"Semifixed sets of maps in hyperspaces with application to set differential equations "*, Set-Valued Anal. 14 (2006) 263-272.

[21] P.E. Kloeden, B.N. Sadovsky, I.E. Vasilyeva: *"Quasi-flows and equations with nonlinear differentials "*, Nonlinear Anal. (2002) 1143-1158.

[22] V. Laksmikantham, S. Leela, A.S. Vatsala: *"Interconnection between set and fuzzy differential equations "*, Nonlinear Anal. 54 (2003) 351-360.

[23] L.A. Zadeh: *"Fuzzy Sets "*, Inform. and Control 8 (1965) 338-353.

[24] M. Puri, D. Ralescu: *"Differentials of fuzzy functions "*, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983) 552-558.

[25] O. Kaleva: *"Fuzzy differential equations "*, Fuzzy Sets Syst. 24 (1987) 301-317.

[26] S. Seikkala: *"On the fuzzy initial value problem "*, Fuzzy Sets Syst. 24 (1987) 319-330.

[27] P. Diamond: *"Stability and periodicity in fuzzy differential equations "*, IEEE Trans. Fuzzy Systems 8 (2000) 583-590.

[28] E. Hüllermeier: *"An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems "*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5 (1997) 117-137.

[29] *"www.ugr.es/ jperez/docencia/GeomConvexos/cap2.pdf "*.